Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana

Dipartimento
Tecnologie
Innovative

SSL

Appunti di meccanica celeste

e nozioni correlate

P. Ceppi

Settembre 2006
(Doc. SSL-060901_BR-it)

Revisioni

Rev.	**Data**	**Autore**	**Descrizione**
0	09.2006	P. Ceppi	Stesura
0.1	21.05.2007	I. Bonesana	Nuovo formato LaTeX
0.2	28.5.2007	PCe	Tabelle numeriche
0.3	30.1.2008	PCe	Sistema inerziale, RAAN, LTAN

Indice

Premessa

Questi sono appunti raccolti da letture estive (agosto 2006). Altre informazioni sono state compilate in formato *slide* (.ppt).

Il materiale è principalmente quello di [1]. Se avete famigliarità con l'inglese leggete l'originale: è senz'altro "più sicuro".

Sono grato per qualsiasi contributo a correzione, miglioramento e completamento di questi appunti.

Grazie al collega prof. G. Salvadè per la paziente rilettura e le correzioni [1].

Paolo Ceppi
SUPSI-SpaceLab
(20 settembre 2006)

Date of printing: 31 gennaio 2008

[1] Per i nostri studenti: in caso di incoerenze/differenze fra quanto presentato qui e i documenti del corso di fisica, senza accordo specifico del docente di fisica quest'ultimi hanno priorità

1 Leggi fondamentali e geometria

1.1 Keplero: tre leggi

Riferimento [1, da pag. 12-1]

Prima legge: ogni pianete si muove attorno al sole percorrendo un ellisse con il sole in uno dei fuochi (il movimento giace su un piano).

Seconda legge: il segmento che congiunge il sole con il pianeta copre aree uguali in tempi uguali.

Terza legge: il rapporto fra il quadrato del periodo dell'orbita (T) e la terza potenza del semiasse maggiore (a) dell'ellisse è costante per tutti i pianeti del nostro sistema solare. T^2/a^3 è costante.

1.2 Newton: legge di gravitazione universale

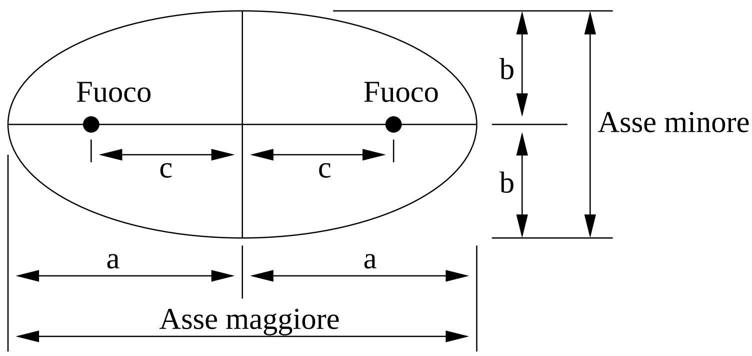
Due masse m_1, m_2 a distanza r si attraggono con una forza

$$F = \frac{G\ m_1\ m_2}{r^2} \tag{1}$$

G è la costante di gravitazione universale.

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

1.3 Geometria dell'ellisse



Vale

$$c^2 = a^2 - b^2 \tag{2}$$

Si definisce eccentricità **e** il rapporto

$$e = \frac{c}{a} \tag{3}$$

da cui risulta

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{4}$$

Per un'orbita circolare vale $e = 0$.

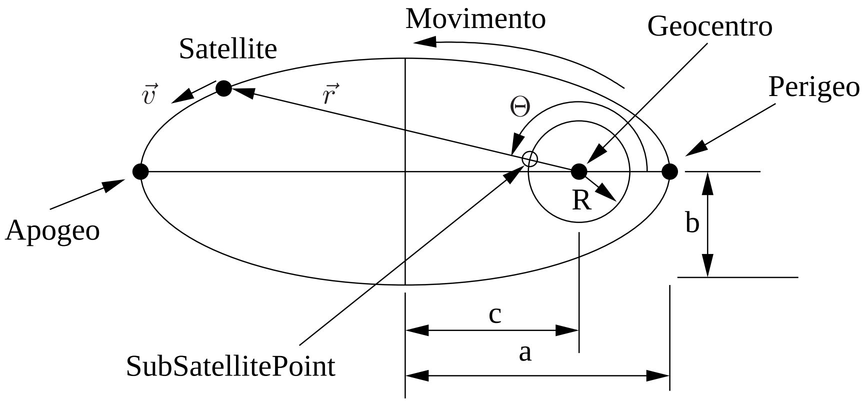
2 Orbite

Si parla di satelliti orbitanti attorno alla terra.

2.1 Definizioni

Riferimento: [1, da pag. 12-3]

In un fuoco dell'orbita del satellite si trova la terra.



Geocentro della terra: posizione del centro di massa.

$r = \|\vec{r}\|$: distanza geocentro – satellite.

True Anomaly: angolo Θ delle coordinate polari (r, Θ) della posizione del satellite. Θ viene misurato dal perigeo.

Apogeo: punto dell'orbita dove $r = r_a$ è massimo.

Perigeo: punto dell'orbita dove $r = r_p$ è minimo.

Sub Satellite Point: punto di intersezione fra r e la superficie della terra.

Inclinazione dell'orbita: angolo **i** fra la normale al piano dell'orbita e l'asse Nord-Sud della terra ([1, pag. 12-9]).
Se $i = 0$ il piano dell'orbita coincide con il piano equatoriale.

2.2 Relazioni fra grandezze

h: altezza del satellite

$$h = r - R \tag{5}$$

dove **R** è il raggio medio della terra.

$$R = 6371\ km$$

r_a: distanza dell'apogeo dal geocentro

$$r_a = a + c = a(1 + e) \tag{6}$$

r_p: distanza del perigeo dal geocentro

$$r_p = a - c = a(1 - e) \tag{7}$$

2.3 Eccentricità e tipo di orbita

$e = 0$	circolare
$0 < e < 1$	ellittica
$e = 1$	parabolica
$e > 1$	iperbolica

2.4 Sistema di riferimento inerziale

È detto *inerziale* (o celeste) un sistema di riferimento con direzione fissa rispetto a stelle lontane.

Terminologia

Sfera celeste: si immagini una sfera di raggio infinito attorno alla terra.

Equatore celeste: è l'estensione in tutte le direzioni dal piano equatoriale della terra.

Asse polare celeste: è l'estensione dell'asse N-S della terra.

Primo punto di Ariete: è la direzione della congiungente terra-sole nel primo giorno di primavera (equinozio).

Per un sistema con origine nel geocentro valgono le seguenti definizioni:

Asse X: punta nella direzione del punto di Ariete. L'asse giace sul piano equatoriale.

Asse Z: coincide con l'asse polare celeste.

Asse Y: è ortogonale ai due precedenti. Giace sul piano equatoriale.

2.4.1 Ascensione retta e declinazione

In un sistema di riferimento celeste, per indicare la posizione di un punto sulla sfera celeste si usano gli elementi

1. **ascensione retta** (*right ascension*) definita come distanza angolare fra il meridiano fondamentale e il meridiano passante per l'oggetto scelto[2] e

2. **declinazione** definita come l'angolo sotteso da un arco di meridiano celeste compreso fra l'equatore celeste e il parallelo passante per l'oggetto[3].

[2] Analogo alla longitudine.
[3] Analogo alla latitudine

2.4.2 Ascensione retta del nodo ascendente (RAAN)

Per indicare l'angolo fra la direzione del punto di Ariete e il nodo ascendente dell'orbita di un satellite (pag. 12) si usa il termine *right ascension of ascending node* (RAAN).

Il parametro RAAN indica l'orientamento del piano orbitale del satellite mentre questo ruota attorno all'asse polare celeste.

3 *The Two-Body Problem*

[1, da pag. 12-3]

3.1 Semplificazioni della situazione

Si suppone che:

1. la terra sia ferma. Si usa un sistema di coordinate con origine nel geocentro;
2. terra e satellite abbiano simmetria sferica. Sono rappresentati da una massa puntiforme al loro centro. **M** sia la massa della terra e **m** quella del satellite;
3. il satellite sia sottoposto solo alla forza di attrazione della terra diretta verso il geocentro.

3.2 Risultati

Tipi di orbita: orbite circolari, ellittiche, paraboliche o iperboliche si ottengono a dipendenza dalle condizioni iniziali.

Piano dell'orbita: l'orbita del satellite si trova su un piano che contiene sempre il geocentro. Una volta determinato dalle condizioni iniziali, l'orientamento di questo piano rimane costante (rispetto alle stelle fisse).

Condizioni iniziali: velocità e posizione del satellite al momento in cui la propulsione viene spenta.

3.3 Periodo in funzione del semiasse maggiore dell'orbita

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G.M}\ a^3 \tag{8}$$

dove la massa della terra **M** vale

$$M = 5.976 \cdot 10^{24}\ kg$$

Risulta

$$T = 165.87 \cdot 10^{-6} \frac{s}{m^{3/2}} \cdot \sqrt{a^3} \tag{9}$$

Per un'orbita circolare $a = r =$ costante.

3.4 Mean Motion (MM)

Numero di orbite completate dal satellite (da perigeo a perigeo) in un giorno solare, ossia $(24h \times 60\frac{min}{h}) = 1440\ min$

$$MM = 1440\ min/T \tag{10}$$

dove $[T] = min$.

3.5 Velocità in funzione della distanza dal geocentro

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = 3.98 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{11}$$

dove $[r] = [a] = m$ e $[v] = \frac{m}{s}$.

Per un'orbita circolare risulta

$$v^2 = 3.986 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \cdot \left(\frac{1}{r}\right). \tag{12}$$

3.6 Posizione

3.6.1 Orbita circolare: r costante

$$\Theta(t) = 2\pi \frac{t}{T} \tag{13}$$

3.6.2 Orbita ellittica

Il tempo t misurato a partire dal passaggio al perigeo si può esprimere con:

$$t = \frac{T}{2\pi}(E(t) - e \sin E(t)) \tag{14}$$

dove la grandezza E è detta *eccentric anomaly* ed è definita in diverse forme, p.e.

$$E(t) = \arcsin\left[\frac{\sqrt{(1-e^2)}\ \sin\Theta(t)}{1 + e\cos\Theta(t)}\right] \tag{15}$$

oppure

$$E(t) = \arccos\left[\frac{e + \cos\Theta(t)}{(1 + e\cos\Theta(t))}\right] \tag{16}$$

$[E] = radianti$

Le due equazioni (14) e (15) assieme sono comunemente chiamate "le equazioni di Keplero".

Dato l'angolo Θ è possibile calcolare la distanza dal geocentro

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1 + e\cos\Theta} \tag{17}$$

Per un'orbita ellittica conosciuta (a, e noti) siamo in grado di calcolare r (eq. 17) e t (eq. 15 e 14) se Θ è dato.

Il calcolo di Θ dato t è più complicato. Richiede di risolvere la (14) per E. Si può fare bene numericamente o usando un grafico.

4 Correzioni al modello semplificato

4.1 Non idealità

1. Sul satellite agiscono altre forze oltre all'attrazione terrestre:
   (a) attrazione del sole, della luna e altri pianeti;
   (b) resistenza "dell'atmosfera": *atmospheric drag*;
   (c) pressione delle radiazioni solari;
   (d) la terra non è sferica e la sua massa non è distribuita uniformemente.

4.2 Ordini di grandezza relativi

Valore approssimativo di varie forze su due satelliti identici ([1, pag. 12-8]; [4, pag. 99]).

	Forza relativa esercitata	
	Sat 1	Sat 2
Origine d. forza	h=370km	h=37'000km
Sole	7×10^{-4}	3×10^{-2}
Luna	4×10^{-6}	1×10^{-4}
Appiattimento della terra	1×10^{-3}	4×10^{-6}

$$Forza\ relativa = \frac{Forza\ media\ dovuta\ alla\ perturbazione}{Forza\ esercitata\ dalla\ terra\ simmetrica}$$

Queste forze hanno un effetto apprezzabile per orbite con $r_a > 1 \times R$.
In alcuni casi l'effetto è cumulativo, in altri si compensa nel tempo.

4.3 Atmospheric drag

È dovuto alla collisione con atomi e ioni. La sua importanza dipende da

1. orbita iniziale;
2. forma geometrica e massa del satellite;
3. composizione della ionosfera, che dipende dall'attività solare, in particolare fra i 300 e i 700km: maggior attività solare - maggior densità atmosferica - maggior *drag*.

4.4 Effetti della deformazione della sfera terrestre

4.4.1 Argomento del perigeo

L'argomento del perigeo è l'angolo fra la retta dei nodi ascendenti e il semiasse maggior dell'orbita al perigeo.

Retta dei nodi: l'intersezione fra il piano equatoriale e il piano dell'orbita del satellite.

L'argomento del perigeo w varia a causa della deformazione della terra.

$$\dot{w} = 4.97 \frac{gradi}{giorno} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{eq}}{a}\right)^3} \cdot \frac{5\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} \tag{18}$$

$R_{eq} = 6'378.140$ km è il raggio medio all'equatore e
$[\dot{w}] = gradi/giorno$

Supponendo $\dot{w} = costante$, per l'argomento del perigeo si può scrivere:

$$w(t) = w_0 + \dot{w}.t \tag{19}$$

Si può calcolare che

$$\dot{w} = 0 \iff i = 63.4^o + n.\frac{\pi}{2} \tag{20}$$

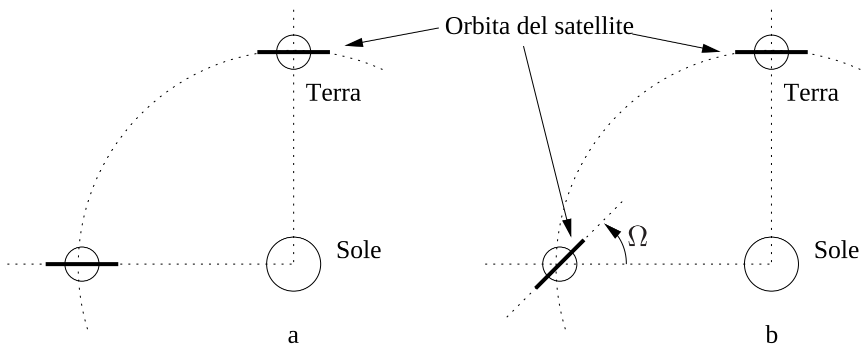
Quindi, per $i = 63.4^o$ (v. 20) risulta $w(t) = w_0 = costante$.

4.4.2 Molniya

Orbite con $i = 63.4^o$ prendono il nome *Molniya* da una serie di satelliti russi che per primi l'anno usata e, con $8h \leq T \leq 12h$ e $0.6 \leq e \leq 0.7$, offrono certi vantaggi per satelliti di comunicazione.

4.4.3 Precessione dell'orbita

L'orientamento del piano orbitale varia a causa della deformazione terrestre.



Riferimento: [1, da pag. 12-11]

Precessione per orbite circolari

$$\dot{\Omega} = -9.95 \frac{gradi}{giorno} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^3} \cdot \cos i \tag{21}$$

dove **i** è l'inclinazione e
$[\dot{\Omega}] = {}^o/giorno$

Precessione per orbite ellittiche

$$\dot{\Omega} = -9.95 \frac{gradi}{giorno} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^3} \cdot \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \tag{22}$$

4.4.4 Orbita eliosincrona

Un'orbita con

$$\dot{\Omega} = 360^o/anno$$

è detta **eliosincrona** (*Sun synchronous*).

Un'orbita eliosincrona:

1. passa sopra (la stessa zona della terra) lo stesso parallelo approssimativamente alla stessa ora ogni giorno;
2. **può tenere il satellite continuamente esposto al sole, rispettivamente mantenere costante il rapporto fra tempo di esposizione e tempo di eclissi.**

Per avere $\dot{\Omega} = 360\ ^o/anno$ occorre una precessione $\dot{\Omega} = \frac{360}{365.25} = 0.986\ ^o/giorno$

Risolvendo per **i** la (21), si ottiene l'inclinazione necessaria affinchè un'orbita circolare sia sincrona, in funzione di **r**.

$$i^* = \arccos\left[-0.09910 \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{6378}\right)^7}\right] \tag{23}$$

Vedi [1, pag. 12-12, eq. 12.15].

5 Orbite speciali

5.1 Orbita geostazionaria e orbita sincrona

Riferimento: [1, da pag. 12-20]

Se $i = 0^o$ e $h = 35'800$ km l'orbita è detta **geostazionaria**.

Il periodo dell'orbita geostazionaria è $T = 23\ h\ 56\ min\ 4,09\ s = 86164,09\ s$, ossia un giorno siderale (v. cap. 6).

Un osservatore sulla terra vede il satellite immobile (gira con la terra). Non c'è effetto doppler per le frequenze di trasmissione.

Se $i \neq 0^o$ e $T = 24$ h l'orbita è detta **sincrona**[4].

L'orbita geostazionaria è un caso speciale di orbita sincrona.

5.2 *Sun Synchronous*

Vedi paragrafi 4.4.4 e 2.4.2.

Un'orbita polare eliosincrona sarà definita

1. dalla sua inclinazione (ca. $\approx 90^o$);
2. dalla sua RAAN (pag. 9) e
3. dal *Local Time at Ascending Node* (LTAN), ossia l'ora del passaggio del satellite al nodo ascendente, espressa in UTC.

5.3 Molniya

Vedi paragrafo 4.4.2.

5.4 Polare

Come dal nome: passa sopra i poli, o per lo meno nelle vicinanze (*"Near polar orbit"*).

5.5 Equatoriale

Come dal nome: il piano dell'orbita coincide con il piano equatoriale ($i = 0^o$).

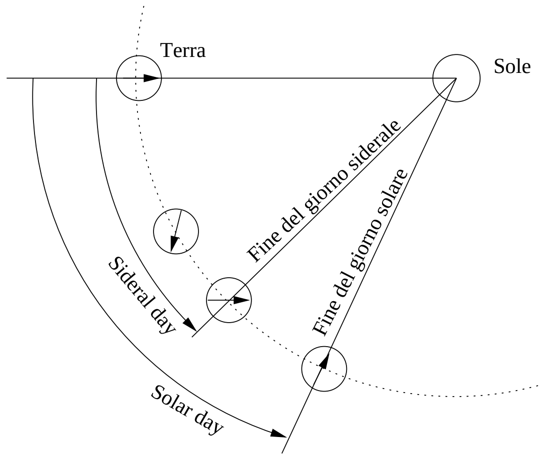
[4] Il *groundtrack* descrive una specie di 8 attorno all'equatore

6 Tempo solare e tempo siderale

Riferimento: [1, da pag. 12-11]

Solar day: 1'440 min

Sideral day: 1'436.07 min
= 23 h 56 min 4,09 sec
= 86'164,09 sec



La NASA dà gli elementi orbitali con "giri/giorno solare".

7 Altri argomenti - riferimenti

7.1 Trigonometria sferica semplice e SubSat-Point

[1, pag. 12-14 e cap. 13] Per orbite circolari ed ellittiche: si presta per esercizi di programmazione.

7.2 Bahn-latitude e Bahn-longitude

[1, pag. 12-18] Definizioni. Vengono usati per i TLE.

7.3 Orbital elements

In situazioni senza propulsione e supponendo assenza di *drag*, bastano 6 parametri al tempo t_0: 3 velocità e 3 posizioni in un sistema cartesiano inerziale.

Per maggior accuratezza, più parametri, p.e. nei *Two Lines Elements* (TLE). [1, cap. 7, pag. 7-17]

7.4 Tracking

[1, cap. 13]

7.5 Doppler-shift

[1, cap. 8]

8 Tabelle numeriche

8.1 Generiche

Parametro	Valore	Unità
Raggio medio della terra	6′371	km
Raggio medio d. terra all'equatore	6′378.140	km
Giorno solare	86'400	s
	1'440	min
Giorno siderale	86'164.09	s
	1'436.07	min

8.2 Microcosm - SMAD

Parametro	**Altezza dell'orbita (km)**					**Unità**
	400	500	600	700	800	
Angolo corrispondente al raggio della tarra	70.22	68.02	66.07	64,3	62.69	^{o}
Tratto d'orbita corrispondente a 1^o di apertura sulla terra	6.98	8.73	10.47	12.2	13.96	km
Velocità lungo l'orbita	7.669	7.613	7.558	7.504	7.452	km/s
Periodo di un'orbita	92.56	94.62	96.69	98.77	100.87	min
Durata massima dell'eclisse	36.11	35.75	35.49	35.29	35.13	min
Durata massima della visibilità dalla GS	10.17	11.55	12.86	14.10	15.30	min
Velocità angolare massima vista dalla GS	1.10	0.87	0.72	0.61	0.53	$^o/s$
Numero giornaliero di orbite	15.51	15.18	14.85	14.54	14.24	1
ΔV per cambiare la quota di 1km	0.57	0.55	0.54	0.53	0.52	m/s
Inclinazione necessaria per un'orbita eliosincrona[a]	97.03	97.40	97.79	98.19	98.60	^{o}
Node spacing[b]	23.20	23.72	24.24	24.76	25.29	^{o}

[a]Non ricalcolabile in base all'equazione (23)
[b]Spaziatura angolare delle orbite

Riferimenti bibliografici

[1] AMSAT. *The Radio Amateur's Satellite Handbook*. The American Radio Relay League, ARRL, 2003. SUPSI-621.3825 DAVI.

[2] Charles D. Brown. *Elements of Spacecraft Design*. AIAA, 2002. Education Series, ISBN: 1-56347-524-3.

[3] Th. B. Reddy D. Linden. *Handbook of Batteries*. McGraw-Hill, 2002. ISBN: 0-07-135978-8.

[4] P. Fortescue et. al. *Spacecraft Systems Engineering*. J. Wiley, 2003. ISBN: 0-471-61951-5.

[5] Mukund R. Patel. *Spacecraft Power Systems*. CRC Press Inc., 2005. ISBN: 0-8493-2786-5.

[6] J. R. Wertz W. J. Larson. *Space Mission Analysis and Design*. Microcosm Press; Kluwer Academic Pub., third edition, 2004. Space Technology Library, vol. 8; ISBN: 1-881883-10-8.